Vnější kalkulus

Antisymetrické formy
Vnější derivace
Lieova derivace forem
Uzavřené a exaktní formy, kohomologie

Antisymetrické formy

prostor tečných p-forem $\quad \Lambda^p M = \mathbb{T}^0_{[p]} M$

prostor polí p-forem $\quad \mathcal{A}^p M = \mathcal{T}^0_{[p]} M$

vnější algebra - nehomog. formy $\quad \Lambda M$

pole nehom. forem $\quad \mathcal{A} M$

Výhoda AS forem je, že se lze obejít bez indexů
- všechny indexy si jsou rovnocenny
- pořadí mění jen znaménko

použití
- symplekt. geom.
- Riemannovské geom
- reprez. Clifford. algeber → spinory
- EM pole
- Hodgeho teorie
- kohomologie

diferenciovatelnost a integrovatelnost
- možnost zavedení diferenciování bez další struktury
- možnost integrování

Vnější derivace

Def:

$$d : \Lambda^p M \to \Lambda^{p+1} M \quad \text{případně } \Lambda M \to \Lambda M$$

$$d(\omega + r\sigma) = d\omega + r\, d\sigma \qquad r \in \mathbb{R}$$

$$d(\omega \wedge \sigma) = d\omega \wedge \sigma + (-1)^p \omega \wedge d\sigma \qquad \omega \in \Lambda^p M$$

na $\Lambda^0 M = \mathcal{F}M$ působí d jako gradient

$$dd\omega = 0$$

Pozn. Leibniz

užití abstr. i-dexů eliminuje znaménko

$$d_a(\omega_{b\dots} \wedge \sigma_{c\dots}) = (d_a \omega_{b\dots}) \wedge \sigma_c + \omega_{b\dots} \wedge d_a \sigma_{c\dots}$$

Pozn. fce

$$\Lambda^0 M = \mathcal{F}M \Rightarrow d(f\omega) = df \wedge \omega + f\, d\omega$$

úplnost a jednozn. definice

$$d\omega = d\Big(\sum_{a_1 < \dots < a_p} \omega_{a_1 \dots a_p} dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_p}\Big)$$

$$= \sum_{a_1 < \dots < a_p} d\omega_{a_1 \dots a_p} \wedge dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_p} \qquad \text{ubylo nám nutno rozderivování } d\omega_{a_1 \dots a_p}$$

$$= \frac{1}{p!} \sum_{a_0 a_1 \dots a_p} \omega_{a_1 \dots a_p, a_0} dx^{a_0} \wedge dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_p} \qquad \text{redukce sumy pro uspořádanou sumu}$$

$$= (p+1) \sum_{a_0 < a_1 < \dots < a_p} \omega_{[a_1 \dots a_p, a_0]} dx^{a_0} \wedge dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_p}$$

$\Rightarrow$ explicitní výraz pro $d\omega$

$\Rightarrow$ souřadnice $(d\omega)_{a_0 a_1 \dots a_p} = (p+1)\, \omega_{[a_1 \dots a_p, a_0]}$

nezávislost na volbě souř.

$$\omega'_{a'_1 \dots a'_p} = X^{n_1}{}_{,a'_1} \cdots X^{n_p}{}_{,a'_p} \omega_{n_1 \dots n_p} \qquad T^n_{a'} = \frac{\partial x^n}{\partial x^{a'}} = x^n{}_{,a'}$$

$$\omega'_{a'_1 \dots a'_p, a'_0} = X^{n_0}{}_{,a'_0} X^{n_1}{}_{,a'_1} \cdots X^{n_p}{}_{,a'_p} \omega_{n_1 \dots n_p, n_0} + \big(X^{n_1}{}_{,\underbrace{a'_1 a'_0}_{\text{sym.}}} X^{n_2}{}_{,a'_2} \cdots + X^{n_1}{}_{,a'_1} X^{n_2}{}_{,\underbrace{a'_2 a'_0}_{\text{sym.}}} \cdots + \dots\big) \omega_{n_1 \dots n_p}$$

$$\omega'_{[a'_1 \dots a'_p, a'_0]} = X^{n_0}{}_{,a'_0} X^{n_1}{}_{,a'_1} \cdots X^{n_p}{}_{,a'_p} \omega_{[n_1 \dots n_p, n_0]}$$

Př:

$$d_a f = f_{,a}$$

$$d_a \alpha_b = 2\,\alpha_{[b,a]} = \alpha_{b,a} - \alpha_{a,b}$$

$$d_a \sigma_{bc} = 3\,\sigma_{[bc,a]} = \sigma_{bc,a} + \sigma_{ab,c} + \sigma_{ca,b}$$

Zúžení vnější der. s vektory

$$a \cdot (\underset{1}{d\gamma}) \cdot b = a \cdot d(b \cdot \gamma) - b \cdot d(a \cdot \gamma) - [a,b] \cdot \gamma$$

důkaz

$\gamma = df \quad \Rightarrow \quad 0 = a \cdot d(b \cdot df) - b \cdot d(a \cdot df) - [a,b] \cdot df$

definice komutátoru.

$\gamma = h\,df \quad \Rightarrow \quad a \cdot (d(h\,df)) \cdot b = a \cdot (dh \wedge df) \cdot b = (a \cdot dh)(b \cdot df) - (a \cdot df)(b \cdot dh)$

$a \cdot d(b \cdot h\,df) - b \cdot d(a \cdot h\,df) - [a,b] \cdot h\,df =$

$= (a \cdot dh)(b \cdot df) - (b \cdot dh)(a \cdot df)$ O.K.

+ linearita vůči součtu

obecně

$$(d_{n_0} \omega_{n_1 \dots n_p})\, a_0^{n_0} a_1^{n_1} \cdots a_p^{n_p} =$$

$$= \sum_{0 \le k \le p} (-1)^k\, a_k^{n_k}\, d_{n_k} \big(\underbrace{\omega_{n_0 \dots n_p} a_0^{n_0} \cdots a_p^{n_p}}_{\text{mimo } k\text{-člen}} \big)$$

$$+ \sum_{0 \le k \le l \le p} (-1)^{k+l}\, [a_k, a_l]^n\, \underbrace{\omega_{n n_0 \dots n_p} a_0^{n_0} \cdots a_p^{n_p}}_{\text{mimo } k,l\text{-členů}}$$

Theorem:

$$(d_{\mu_0}\omega_{\mu_1 \dots \mu_n})\, a_0^{\mu_0} a_1^{\mu_1} \dots a_n^{\mu_n} =$$

$$= \sum_{0\le k\le n} (-1)^k a_k^{\mu} d_{\mu}\Big(\underbrace{\omega_{\mu_0 \dots \mu_n} a_0^{\mu_0} \dots a_n^{\mu_n}}_{\text{mimo } \mu_k}\Big) +$$

$$+ \sum_{0\le k<l\le n} (-1)^{k+l} [a_k, a_l]^{\mu}\, \underbrace{\omega_{\mu\mu_0 \dots \mu_n} a_0^{\mu_0} \dots a_n^{\mu_n}}_{\text{mimo } \mu_k \mu_l}$$

Důkaz:

$$\omega = \sum_{1\le\mu_1<\dots<\mu_n\le d} \omega_{\mu_1 \dots \mu_n} dx^{\mu_1}\wedge \dots \wedge dx^{\mu_n}$$

$$d_{\alpha_0}\omega_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \sum_{1\le\mu_1<\dots<\mu_n\le d} d_{\alpha_0}\omega_{\mu_1 \dots \mu_n} \wedge d_{\alpha_1}x^{\mu_1}\wedge \dots \wedge d_{\alpha_n}x^{\mu_n}$$

$$= \sum_{1\le\mu_1<\dots<\mu_n\le d}\ \sum_{0\le k\le n} (-1)^k (d_{\alpha_k}\omega_{\mu_1 \dots \mu_n})\, \underbrace{d_{\alpha_0}x^{\mu_1}\wedge \dots \wedge d_{\alpha_n}x^{\mu_n}}_{\text{mimo } \alpha_k}$$

$$= \sum_{0\le k\le n} (-1)^k (d_{\alpha_k}\omega_{\mu_1 \dots \mu_n})\, \underbrace{d_{\alpha_0}x^{\mu_1} \dots d_{\alpha_n}x^{\mu_n}}_{\text{mimo } k}$$

$$(d_{\alpha_0}\omega_{\alpha_1 \dots \alpha_n})\, a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} \dots a_n^{\alpha_n} =$$

$$= \sum_{0\le k\le n} (-1)^k a_k^{\mu} (d_{\mu}\omega_{\mu_1 \dots \mu_n})\, \underbrace{a_0^{\mu_1} \dots a_n^{\mu_n}}_{\text{mimo } k} =$$

$$= \sum_{0\le k\le n} (-1)^k a_k^{\mu} d_{\mu}\Big(\underbrace{\omega_{\mu_0 \dots \mu_n} a_0^{\mu_0} \dots a_n^{\mu_n}}_{\text{mimo } \mu_k}\Big) +$$

$$+ \sum_{0\le k<l\le n} (-1)^{k+l} \Big(a_k^{\nu}(d_{\nu} a_l^{\mu}) - a_l^{\nu} d_{\nu} a_k^{\mu}\Big) \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\, \underbrace{\omega_{\mu\mu_0 \dots \mu_n} a_0^{\mu_0} \dots a_n^{\mu_n}}_{\text{mimo } \mu_k \mu_l}$$

$$= \sum_{0\le k\le n} (-1)^k a_k^{\mu} d_{\mu}\Big(\underbrace{\omega_{\mu_0 \dots \mu_n} a_0^{\mu_0} \dots a_n^{\mu_n}}_{\text{mimo } \mu_k}\Big) +$$

$$+ \sum_{0\le k<l\le n} (-1)^{k+l} [a_k, a_l]^{\mu}\, \underbrace{\omega_{\mu\mu_0 \dots \mu_n} a_0^{\mu_0} \dots a_n^{\mu_n}}_{\text{mimo } \mu_k \mu_l}$$

holonomnost báze

na topologicky triv. okolí $U \subset M$ mějme ~~zadané~~ ~~bázi~~ bázi $e_k \in TU$ a duální bázi $e^k \in T^*U$
následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) e_k je holonomní tj. $\exists$ souř. x^k taky, že $e_k = \frac{\partial}{\partial x^k}$

(ii) e^k tvoří exaktní formy $e^k = dx^k$ x^k souř. na U

(iii) $de^k = 0$ $\forall k$

(iv) $[e_k, e_l] = 0$ $\forall k, l$

důkaz:

(i),(ii) přímo def. holonomnosti a duálnost $\frac{\partial}{\partial x^k}$ a dx^k

(iii) $de^k = 0$ na top. triv. $U \Leftrightarrow e^k = dx^k$ (Poincaré lemma)

(iv) $e_k \cdot (de^m) \cdot e_l = e_k \cdot d(\underbrace{e_l \cdot e^m}_{0}) - e_l \cdot d(\underbrace{e_k \cdot e^m}_{0}) - [e_k, e_l] \cdot e^m$

$\Rightarrow \forall m \; de^m = 0 \Leftrightarrow \forall k, l \; [e_k, e_l] = 0$

Lieova derivace forem

Lieova der. na formách splňuje

$$\mathcal{L}_a : \Omega^p M \to \Omega^p M$$

$$\mathcal{L}_a(\omega + \sigma) = \mathcal{L}_a\omega + \mathcal{L}_a\sigma$$

$$\mathcal{L}_a(\omega\wedge\sigma) = (\mathcal{L}_a\omega)\wedge\sigma + \omega\wedge(\mathcal{L}_a\sigma)$$

$$\mathcal{L}_a f = a\cdot df \qquad f\in\mathcal{F}M = \Omega^0 M$$

$$\mathcal{L}_a df = d\mathcal{L}_a f$$

Tyto vlastnosti určují operaci na formách jednozn.

důk:
Leibnitz plyne z Leibnitze pro $\otimes$ a vztahu
$\omega\wedge\sigma = \bigcirc\, \Omega(\omega\otimes\sigma)$ + linearita
jednozn. plyne z rozkladu obecného ω na kompon.

Cartanova identita

$$\mathcal{L}_a\omega = a\cdot d\omega + d(a\cdot\omega)$$

$$\mathcal{L}_a = \iota_a d + d\,\iota_a \qquad \text{(homotopy id)}$$

důkaz 1: indukcí přes stupeň

$p=0$ $\quad \mathcal{L}_a f = a\cdot df + d(\cancel{a\cdot f}^{\,0})$ ✓

$p\to p+1$ $\quad \alpha\in\Omega^p M \quad \omega\in\Omega^{p+1}$ – suma členů typu $df\wedge\alpha$

$$\mathcal{L}_a(df\wedge\alpha) = (d\mathcal{L}_a f)\wedge\alpha + df\wedge\mathcal{L}_a\alpha =$$
$$= (d(a\cdot df))\wedge\alpha + df\wedge(a\cdot d\alpha) + df\wedge d(a\cdot\alpha)$$
$$= d((a\cdot df)\wedge\alpha) - (a\cdot \cancel{df})d\alpha - a\cdot(df\wedge d\alpha) + (a\cdot\cancel{df})d\alpha - d(df\wedge(a\cdot\alpha))$$
$$= d(a\cdot(df\wedge\alpha)) + d(df\wedge(a\cdot\alpha)) + a\cdot d(df\wedge\alpha) - d(df\wedge(a\cdot\alpha))$$
$$= a\cdot d(df\wedge\alpha) + d(a\cdot(df\wedge\alpha)) \qquad \text{c. b. d.}$$

důkaz 2: operace $a d + d\iota_a$ splňuje vlastnosti výše

Leibnitz: $a\cdot d(\omega\wedge\sigma) + d(a\cdot(\omega\wedge\sigma)) = a\cdot(d\omega\wedge\sigma + (-1)^p\omega\wedge d\sigma) + d((a\cdot\omega)\wedge\sigma + (-1)^p\omega\wedge(a\cdot\sigma))$

$= (a\cdot d\omega + d(a\cdot\omega))\wedge\sigma + (-1)^{2p}\omega\wedge(a\cdot d\sigma + d(a\cdot\sigma))$

$+ (-1)^{p+1}\cancel{d\omega\wedge(a\cdot\sigma)} + (-1)^p\cancel{(a\cdot\omega)\wedge d\sigma} + (-1)^p\cancel{d\omega\wedge(a\cdot\sigma)} + (-1)^{p-1}\cancel{(a\cdot\omega)\wedge d\sigma}$ $\quad$ c. b. d.

platí

Th: $\mathcal{L}_a d = d\mathcal{L}_a$ na celé AM

důk: $\mathcal{L}_a d\omega = a\cdot d\cancel{d\omega}^{0} + d(a\cdot d\omega) =$

$= d(\mathcal{L}_a\omega - d(a\cdot\omega)) = d\mathcal{L}_a\omega$ c.b.d.

Th: $\mathcal{L}_a \iota_b - \iota_b\mathcal{L}_a = \iota_{[a,b]}$

důk: $\mathcal{L}_a(b\cdot\omega) = (\mathcal{L}_a b)\cdot\omega + b\cdot(\mathcal{L}_a\omega) =$

$= [a,b]\cdot\omega + \iota_b\mathcal{L}_a\omega$ c.b.d.

Th: $\mathcal{L}_{fa}\omega = f\mathcal{L}_a\omega + df\wedge(a\cdot\omega)$

důk: $\mathcal{L}_{fa}\omega = fa\cdot d\omega + d(fa\cdot\omega) =$

$= f(a\cdot d\omega + d(a\cdot\omega)) + df\wedge(a\cdot\omega)$

$= f\mathcal{L}_a\omega + df\wedge(a\cdot\omega)$

Uzavřené a exaktní formy

Def:

ω je uzavřená $\equiv$ $d\omega = 0$ $\quad \Omega^p_c M \quad \Omega_c M$

ω je exaktní $\equiv$ $\exists \sigma \; \omega = d\sigma$ $\quad \Omega^p_e M \quad \Omega_e M$

neboli

$\Omega_c M = \ker d \qquad \Omega_e M = \operatorname{im} d$

platí

ω exaktní $\Rightarrow$ ω uzavřená

platí i naopak – pouze na top. triv. oblasti

na oblasti U homeomorfní B^n (tj. $\mathbb{R}^n$)

ω exaktní $\Leftrightarrow$ ω uzavřená

tj.

$d\omega \Leftrightarrow \exists \sigma \; \omega = d\sigma$

obecně mohou být topologické obstrukce

$\rightarrow$ viz deRhamova kohomologie